ISTITUTO LOMBARDO

ACCADEMIA DI SCIENZE E LETTERE

RENDICONTI

Scienze Matematiche e Applicazioni

A

Vol. 129 (1995) - Fasc. 1 e 2

ESTRATTO

CARLO FELICE MANARA

OSSERVAZIONI SUL PROBLEMA DELLA PRODUZIONE CONGIUNTA

Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere

MILANO

1996

Economia matematica Istituto Lombardo (Rend. Sc.) A 129, 83-96 (1995)

OSSERVAZIONI SUL PROBLEMA DELLA PRODUZIONE CONGIUNTA

Nota del m. e. CARLO FELICE MANARA

(Adunanza del 29 giugno 1995)

SUMMARY. — This paper deals with a linear model of joint production. A formula of distribution between technologies is given, and the correspondent uniform rates of net product are determined.

Avvertenze

1. - Nel seguito faremo uso metodico della funzione *sgn* (x), definita sul campo reale dalle seguenti relazioni:

$$x < 0 \longrightarrow \quad sgn\,(x) = -1\,,$$

$$x \geqslant 0 \longrightarrow \quad sgn\,(x) = +1\,.$$

2. - Un vettore ad n componenti sarà sempre immaginato come vettore-riga, cioè come matrice $(1, n)$; quando un vettore v sarà immaginato come vettore-colonna, cioè come matrice $(n, 1)$, esso sarà indicato col simbolo "v^{t}", apponendo in alto a destra del simbolo del vettore il simbolo "^{t}" della operazione di trasposizione.

Cap. I - Funzioni di partizione dell'unità

1. - *Caso particolare*

È dato un numero reale $t > 0$. Sull'asse reale positivo si considerino i due intervalli:

$$J_1 = \{x \mid 0 \leqslant x < t\} ; \tag{1}$$

$$J_2 = \{x \mid t \leqslant x\} .$$

Ovviamente la lunghezza di J_1 vale t; mentre J_2 è di lunghezza infinita, perché è costituito da tutti i valori di x maggiori di t.

Si consideri ora un numero reale $y > 0$, e sia Y l'intervallo:

$$Y = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant y\} . \tag{2}$$

Poniamo:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(1 + t/y) + \frac{1}{2}(1 - t/y) \cdot sgn\,(t - y) . \tag{3}$$

$$\sigma_2 = [(y - t)/2y] \cdot [1 - sgn\,(t - y)] .$$

OSSERVAZIONE 1. - Le funzioni della variabile y, indicate con i simboli σ_1 e σ_2, hanno il seguente comportamento sul semiasse reale positivo:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 1 , \tag{4}$$

$$0 \leqslant y < t \longrightarrow \sigma_1 = 1;\ \sigma_2 = 0 ,$$

$$t \leqslant y \longrightarrow \sigma_1 = t/y;\ \sigma_2 = (y - t)/y .$$

In parole il comportamento delle funzioni σ potrebbe essere descritto dicendo che esse, per ogni valore della variabile $y \geqslant 0$, forniscono una partizione dell'unità in due addendi proporzionali alle due (eventuali) parti in cui l'intervallo Y, dato dalla (2), è ripartito dai due intervalli J_1 e J_2: cioè l'unità viene ripartita in due addendi di valori proporzionali alle lunghezze degli intervalli:

(5) $$Y \cap J_1 \quad \text{ed} \quad Y \cap J_2 .$$

2. - *Caso generale*

Indichiamo con m un numero naturale, e siano dati m numeri reali positivi:

(1) $$t_i > 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant m ;$$

poniamo:

(2) $$S_i = t_1 + t_2 + \ldots + t_i .$$

OSSERVAZIONE 2. - Si ha ovviamente:

(3) $$S_{i+1} > S_i \quad ; \quad 1 \leqslant i < m .$$

Consideriamo ora gli m intervalli del semiasse reale positivo:

(4) $$J_1 = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant t_1\} ,$$

(5) $$J_k = \{x \mid S_{k-1} \leqslant x \leqslant S_k\} , \qquad 1 < k \leqslant m .$$

Sia dato poi un numero reale positivo y, soddisfacente alle relazioni:

(6) $$0 < y \leqslant S_m ;$$

ed indichiamo con Y l'intervallo definito da:

(7) $$Y = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant y\} .$$

Supponiamo che sia:

$$y \in J_k \,, \tag{8}$$

ossia che si abbia:

$$S_{k-1} < y \leqslant S_k; \qquad 1 < k \leqslant m \,, \tag{9}$$

e consideriamo gli intervalli U_i dell'asse reale dati da

$$U_i = Y \cap J_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{10}$$

I k intervalli (10) hanno rispettivamente le lunghezze:

$$t_1, \ t_2, \ \ldots, \ t_{k-1}, \ (y - S_{k-1}) \,. \tag{11}$$

Costruiamo ora le funzioni della variabile y date da:

$$\beta_i = \{[y - S_i] \cdot [1 + sgn\,[y - S_i]]\} / 2y \,; \tag{12}$$

dalla definizione si trae che i valori delle funzioni β_i sono dati da:

$$\begin{aligned} y < S_i &\longrightarrow \beta_i = 0 \,, \\ y \geqslant S_i &\longrightarrow \beta_i = [y - S_i]/y \,. \end{aligned} \tag{13}$$

Costruiamo ora le funzioni della variabile y definite da:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}[1 + t_1/y] + \frac{1}{2}\{[1 - t_1/y] \cdot sgn\,[t_1 - y]\} \,, \tag{14}$$

e, per $i > 1$:

$$\sigma_i = \beta_{i-1} - \beta_i \,. \tag{15}$$

OSSERVAZIONE 3. - Per ogni valore della variabile y soddisfacente alle (6), le funzioni σ date dalle (14), (15) soddisfano alle relazioni:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k = 1; \qquad 1 < k \leqslant m . \tag{16}$$

Inoltre i valori delle funzioni stesse sono rispettivamente proporzionali alle lunghezze (11) degli intervalli (10).

Infatti: se è

$$y \in J_1 \qquad \text{ossia} \qquad 0 < y < t_1 \tag{17}$$

si ha, per le (13) & (14):

$$\sigma_1 = 1; \qquad \text{e} \qquad i > 1 \longrightarrow \sigma_i = 0 . \tag{18}$$

Se invece valgono le (9) si ha:

$$\sigma_1 = t_1/y ; \tag{19}$$

ed anche:

$$1 < i < k \longrightarrow \sigma_i = [y - S_{i-1}]/y - [y - S_i]/y = t_i/y , \tag{20}$$

ed infine:

$$\sigma_k = [y - S_{k-1}]/y . \tag{21}$$

Cap. II - La produzione congiunta

1. - *Il caso semplice*

Si consideri un dato sistema economico; supponiamo che i processi produttivi siano descritti da una matrice M quadrata di ordine $n+1$, che scriveremo nella forma:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} \tau & b \\ \hline c' & A \end{array} \right] . \tag{1}$$

Secondo le solite convenzioni, nella matrice M le righe corrispondono ai vari beni prodotti, e le colonne corrispondono ai processi di produzione; pertanto, come al solito, l'elemento della matrice M che sta nella riga di indice i e nella colonna di indice k indica un coefficiente di produzione nel processo k-esimo, e precisamente indica il coefficiente di impiego del bene di indice i in tale processo. Abbiamo messo in evidenza la prima colonna a sinistra, supponendo che essa contenga i coefficienti relativi ad un mezzo di produzione non prodotto [MPNP, secondo la simbologia adottata da A. Quadrio Curzio in [1], pag. 13]; per fissare le idee, possiamo supporre che si tratti di "terra", e che il bene prodotto sia "grano"; allora il numero reale τ indica il coefficiente di impiego del grano nella produzione del grano; e gli elementi del vettore c indicano ovviamente i coefficienti di impiego degli altri beni nella tecnologia di produzione del grano.

Analogamente gli elementi del vettore b indicano i coefficienti di impiego del grano nella produzione degli altri beni.

Supporremo che la matrice M soddisfi alle ipotesi di essere positiva e quindi indecomponibile.

Il vettore x di input di fattori produttivi nel sistema può essere indicato con il simbolo:

$$x = [y \mid z] , \tag{2}$$

nel quale y è un numero reale che indica la quantità di grano, e z è un vettore ad n componenti, ciascuna delle quali indica quantità di beni diversi dal grano.

In coerenza con questi simboli, le quantità di beni impiegate nei processi produttivi sono date dalle componenti del vettore:

$$M \cdot x' ; \tag{3}$$

in particolare la quantità di grano impiegata sarà data da:

$$\tau \cdot y + b \cdot z' . \tag{4}$$

2. - *Esistenza di due diverse tecnologie di produzione di uno stesso bene*

Supponiamo ora, secondo lo schema classico, che esistano due qualità di MPNP (per es. di terra). Supponiamo che la differenza tra queste due qualità di MPNP possa essere espressa esclusivamente con la differenziazione dei vettori che costituiscono la prima colonna a sinistra della matrice M. Si possono quindi considerare due matrici del sistema:

$$(1) \qquad M_1 = \left[\frac{\tau_1}{c_1'} \middle| \frac{b}{A} \right]; \quad M_2 = \left[\frac{\tau_2}{c_2'} \middle| \frac{b}{A} \right].$$

Si può ora prendere in considerazione una combinazione lineare a coefficienti positivi di somma 1 delle matrici (1): indicando con σ_1 e σ_2 i due coefficienti, e supponendo che siano valide le ipotesi poco sopra espresse in parole:

$$\sigma_1, \ \sigma_2 > 0 \ ; \qquad \sigma_1 + \sigma_2 = 1 \, .$$

si avrà:

$$(3) \qquad M = \sigma_1 \cdot M_1 + \sigma_2 \cdot M_2 = \left[\frac{\sigma_1 \cdot \tau_1 + \sigma_2 \cdot \tau_2}{\sigma_1 \cdot c_1' + \sigma_2 \cdot c_2'} \middle| \frac{b}{A} \right].$$

La scelta dei due coefficienti σ della combinazione lineare (3) è stata finora considerata come completamente libera; nulla vieta che tale scelta possa essere fatta mediante le formule (3) del Paragrafo 1 della parte I.

L'adozione di questo criterio di scelta può derivare per esempio da proprietà del sistema economico: per esempio può avvenire che la tecnologia di indice 1 che entra nelle matrici (1) abbia un "tetto" di impiego dei fattori di produzione; in conseguenza della (4) del Paragrafo precedente, possiamo supporre che si abbia:

$$(4) \qquad t = \tau_1 \cdot y + b \cdot z' \, .$$

E può avvenire che la tecnologia di indice 1 sia utilizzata prima dell'altra, fino ad esaurimento delle sue possibilità di produzione, quindi fino a raggiungere e superare il tetto t.

Si potrebbe pensare che ciò avvenga perché esiste un criterio di "efficienza", che induce a sfruttare la prima tecnologia e ad esaurirne le possibilità prima di iniziare ad utilizzare la seconda. Per quanto riguarda la tecnologia corrispondente all'indice 2, supporremo qui che non esistano limitazioni alle quantità prodotte.

Discuteremo nelle pagine che seguono le possibilità di esprimere dei criteri di scelta di questo tipo mediante gli elementi della matrice M del sistema.

3. - *Criteri di scelta tra tecnologie*

Abbiamo parlato poco sopra di criteri di scelta fra tecnologie; a questo proposito osserviamo che la determinazione di criteri cosiffatti può essere fatta in base a giudizi dettati dalla Teoria economica, o può essere fondata su altre considerazioni, che hanno la loro origine in teorie diverse.

Nelle pagine che seguono svilupperemo qualche considerazione matematica in proposito, considerazione che vuole avere soltanto valore strettamente esemplificativo, perché pensiamo che ovviamente le questioni in parola non possano essere risolte in base a soli sviluppi matematici.

Ciò premesso, richiamiamo qui i classici teoremi di Perron e Frobenius relativi alle matrici non negative indecomponibili, cioè della classe che comprende per ipotesi anche la classe delle matrici positive, a cui appartiene la M.

In questo caso i teoremi ricordati assicurano che esiste un numero reale positivo μ ed un vettore q, ad $n+1$ componenti tutte positive, tale che si abbia:

$$(1) \qquad [\mu \cdot M - I] \cdot q' = 0 \,.$$

Si ha inoltre che il numero μ è reale ed è radice dell'equazione algebrica di ordine $n+1$, che si può scrivere nella forma:

$$(2) \qquad \left| \mu \cdot M - I \right| = 0 \,;$$

la radice considerata è semplice ed è la radice di minimo modulo tra tutte quelle dell'equazione algebrica (2). Essa verrà chiamata qui la

"Radice di Frobenius della equazione (1)", o anche, per brevità, "radice di Frobenius della matrice M".

Considerazioni economiche inducono a prendere in considerazione soltanto i casi in cui si abbia:

$$\mu > 1 ; \tag{3}$$

questa ipotesi sarà da noi considerata sempre valida nel seguito; pertanto porremo, secondo l'uso:

$$\mu = 1+s ; \qquad s > 0 , \tag{4}$$

ed il numero reale positivo s sarà chiamato "saggio uniforme di prodotto netto" (Cfr. [1] pag. 17).

La teoria delle matrici non negative indecomponibili garantisce che il numero μ sopra considerato è funzione decrescente degli elementi di M; ciò si trae da [1], pag. 17 formula (9), e da risultati noti (Cfr. per es. [2]; Appendice VI, teo. 2, pag. 302).

Prendiamo ora in considerazione le due matrici M_1 e M_2 del paragrafo precedente, e supponiamo che tra i coefficienti τ_1 e τ_2 e tra i vettori c_1 e c_2 sussistano le relazioni:

$$\tau_2 > \tau_1 ; \qquad c_2 > c_1 ; \tag{5}$$

indichiamo con s_1 ed s_2 rispettivamente i saggi uniformi di prodotto netto corrispondenti alle matrici stesse; da quanto precede si ha:

$$s_2 < s_1 . \tag{6}$$

Consideriamo ora la matrice M data dalla (3) del paragrafo precedente, che si ottiene eseguendo la combinazione lineare delle due matrici M (1) ed M (2) con i coefficienti σ_1 e σ_2 che soddisfano alle (2) dello stesso paragrafo. In forza delle (5) e delle (2) del paragrafo precedente si ha:

(7) $$\tau_1 < \sigma_1 \cdot \tau_1 + \sigma_2 \cdot \tau_2 < \tau_2 ;$$

$$c_1 < \sigma_1 \cdot c_1 + \sigma_2 \cdot \tau_2 < c_2 .$$

Di conseguenza, indicando con s il saggio uniforme di prodotto netto della matrice M data dalla (3) del paragrafo precedente, si ha ovviamente:

(8) $$s_1 > s > s_2 .$$

Più precisamente si dimostra facilmente che s è una funzione continua del rapporto

(9) $$\sigma_2/\sigma_1$$

che tende ad s_2 quando σ_1 tende a zero e quindi σ_2 tende ad 1.

Osservazione 4. - Le ipotesi (5) forniscono delle condizioni sufficienti perché si verifichi la (6), in forza dei teoremi ricordati della teoria delle matrici non negative. Dal punto di vista intuitivo, e dal significato economico delle grandezze coinvolte, tali ipotesi appaiono abbastanza ragionevoli. Infatti, in base a ciò che è stato detto nel paragrafo 1, le componenti del vettore che costituisce la prima colonna a sinistra della matrice M forniscono le percentuali dei vari beni che entrano nella tecnologia di produzione del primo bene ("grano" nella esemplificazione). Se esistono due tecnologie di questo tipo (legate a due tipi di "terra", secondo la esemplificazione ricordata) appare intuitivamente verosimile che la "terra" di qualità migliore richieda quantità minori di beni per produrre il grano, rispetto alla terra di qualità peggiore. Le ipotesi (5) esprimono che questo fatto si avvera per ognuno dei beni che entrano nella produzione del grano con la seconda tecnologia. In altra forma si potrebbe dire che le ipotesi (5) indicano che la seconda tecnologia fa "consumare di più" di ogni fattore produttivo rispetto alla prima. Se ciò si avvera sussistono le (6) e (8); ma occorre osservare che queste ultime relazioni possono sussistere anche se le (5) non sono soddisfatte.

Ritorneremo in seguito su questo argomento in un apposito paragrafo.

4. - *Esistenza di più di due tecnologie di produzione dello stesso bene*

Gli sviluppi dei precedenti paragrafi si generalizzano senza difficoltà al caso in cui un medesimo bene possa venir prodotto da m tecnologie, con $m > 2$, corrispondenti ad m MPNP diversi; per mantenere l'esempio già trattato, supponiamo che tali m MPNP siano "qualità di terra".

Supponiamo inoltre che ognuna di tali tecnologie sia caratterizzata dalla coppia:

(1) $$\tau_i \ , \ c_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant m) \, .$$

e quindi da una matrice:

(2) $$M_i = \left[\begin{array}{c|c} \tau_i & b \\ \hline c_i' & A \end{array} \right], \qquad (1 \leqslant i \leqslant m) \, .$$

E supponiamo infine che ognuna di tali tecnologie abbia un "tetto" di produzione:

(3) $$t_i > 0 \, ; \qquad (1 \leqslant i \leqslant m) \, .$$

Supponiamo che esista un criterio di scelta tra tecnologie, in modo che quella di indice i sia utilizzata prima di quella di indice $i+1$, fino a raggiungere e superare il "tetto" della produzione possibile, dato dalla (3).

Riprendiamo ora le notazioni introdotte nel paragrafo 2 del Cap. I, ponendo in particolare:

(I.2.2) $$S_i = t_1 + t_2 + \ldots + t_i \; ; \qquad 1 \leqslant i \leqslant m \, .$$

Indichiamo anche qui con y la quantità prodotta della merce 1, e supponiamo che si abbia:

(4) $$S_{k-1} < y \leqslant S_k \qquad 1 < k \leqslant m \, .$$

Consideriamo infine le funzioni σ_i, introdotte con le formule (I.2.14,15). Sotto le ipotesi formulate, si ha che la matrice M, data da:

$$M = \sum_j \sigma_j \cdot M_j \; ; \qquad 1 < j \leqslant k \, , \tag{5}$$

descrive il fenomeno della produzione nel sistema considerato; e precisamente in modo tale che, per

$$1 < i \leqslant k-1$$

tutti i "tetti di produzione siano raggiunti, mentre la k-esima tecnologia è attivata in corrispondenza dei parametri t_k e c_k, senza che il "tetto" t_k corrispondente sia superato.

OSSERVAZIONE 5. - Si osservi che, in forza della (I.2.16), e con riferimento alla (2), la matrice M data dalla (5) ha gli elementi di tutte le colonne, dalla seconda in avanti, uguali a quelli delle corrispondenti colonne della (2); soltanto gli elementi della prima colonna risultano dalle combinazioni lineari dei corrispondenti elementi delle matrici (2), con coefficienti dati dalle citate funzioni σ_j. Precisamente si ha, per la M:

$$\tau = \sum \sigma_j \cdot \tau_j \; ; \qquad c = \sum \sigma_j \cdot c_j \, . \tag{5}$$

5. - *Le variazioni del saggio uniforme del prodotto netto*

Nel precedente paragrafo abbiamo accennato alla possibilità di un ordinamento tra le tecnologie di produzione della merce di indice 1; si osservi ora che un ordinamento cosiffatto può nascere in conseguenza a considerazioni di carattere non matematico, come è già stato detto sopra, nel paragrafo 3. In altre parole, un ordinamento tra le tecnologie è frutto di una scelta, che risponde a determinati criteri i quali, in linea di principio, non possono essere imposti in base a sole considerazioni matematiche.

Riprendendo ciò che è già stato detto sopra, nel paragrafo 3, si osserva che un criterio di scelta può essere formulato quando sia possibile stabilire una graduatoria di efficienza tra le tecnologie; tale graduatoria può essere data per esempio da un ordinamento tra i saggi uniformi di prodotto netto, che viene espressa da relazioni del tipo:

$$s_i > s_{i+1} \; . \tag{1}$$

Si verifica che condizione sufficiente perché queste relazioni sussistano è che siano valide le relazioni:

$$\tau_{i+1} > \tau_i \; ; \qquad c_{i+1} > c_i \; ; \qquad 1 \leqslant i < m \; . \tag{2}$$

Tuttavia queste sono — ripetiamo — condizioni soltanto sufficienti perché sussistano le (1); infatti il significato dei coefficienti τ e delle componenti del vettore c induce a pensare che, se sussistono le (5), la tecnologia di indice $i+1$ richiede di impiegare, per la produzione della merce 1, delle quantità maggiori di ogni bene, rispetto alla tecnologia di indice i. Ricordiamo qui ciò che è già stato richiamato nel paragrafo 3; e precisamente che la teoria delle matrici quadrate non negative garantisce che il saggio uniforme di prodotto netto è funzione decrescente degli elementi di una matrice.

Tuttavia è noto [3] che, data una matrice quadrata M, di ordine $n+1$, ed indicati con μ e q i suoi elementi di Frobenius, è possibile costruire una classe di matrici quadrate D, pure di ordine $n+1$, tali che, posto:

$$M^* = M + D \; , \tag{3}$$

si abbia ancora:

$$[\mu \cdot M^* - I] \cdot q' = 0 \; . \tag{4}$$

Le matrici D sono funzioni continue di n^2 parametri reali, ed alla loro classe appartiene anche la matrice nulla. È quindi possibile scegliere una matrice D tale che la M data dalla (3) sia ancora positiva.

Si osserva ora che non può essere:

$$M^* > M\,, \tag{5}$$

perché ciò condurrebbe a concludere che la radice di Frobenius μ della M^* è minore di quella della M.

Indichiamo ora con m_{ik} e corrispondentemente con m_{ik^*} gli elementi delle matrici M ed M^*, e poniamo:

$$d_{ik} = m_{ik^*} - m_{ik}\,; \qquad [1 \leqslant i, k \leqslant n+1]\,, \tag{6}$$

sia δ la massima di queste differenze; per l'osservazione fatta si ha:

$$\delta > 0\,. \tag{7}$$

Costruiamo ora la matrice M_1, che si ottiene dalla M^* aggiungendo $\frac{1}{2}\,\delta$ ad ogni suo elemento. In forza dei teoremi ricordati, la matrice M_1 ha una radice di Frobenius minore di quella della M^*, (e quindi di quella di M, che è uguale a quella di M) ma per costruzione almeno un elemento di M_1 è minore del corrispondente elemento di M.

OSSERVAZIONE 6. - Pare lecito pensare che la utilizzazione delle opportunità offerta dalla costruzione delle matrici D permetta di escogitare altri criteri di confronto tra le varie possibili tecnologie di produzione; in particolare permetta di enunciare delle condizioni meno restrittive delle (2) perché si realizzino le (1).

BIBLIOGRAFIA

[1] ALBERTO QUADRIO CURZIO, CARLO FELICE MANARA, MARIO FALIVA, *Produzione ed efficienza con tecnologie globali*. [Economia politica/a. IV. n. 1, aprile 1987].

[2] C.F. MANARA & P.C. NICOLA, *Elementi di Economia matematica*.

[3] C.F. MANARA, *Osservazioni sulle matrici ad elementi non negativi*. Economia Politica, 1994.